

DS de mathématiques

n°7.1

Systèmes linéaires, polynômes, relations de comparaison – Corrigé

Noté sur 52,5 pts ± 2.5 pts pour le soin et la clarté,
puis la note est ramené sur 20 en multipliant par 20/45.

/12 1 Pour s'échauffer

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1) Résoudre en discutant selon la valeur de $m \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ -x + 3y - 2z = 1 \\ 2x - 3y + 7z = m \end{cases}$$

/3

La matrice augmentée est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 7 & m \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & m-2 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 + L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & m-4 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_3 - L_2 \end{array} \quad \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ y + z = 2 \\ 0 = m - 4 \end{cases}$$

– Si $m \neq 4$, alors $S = \emptyset$.

– Si $m = 4$, alors le système devient :

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ y + z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 - z \\ x = 1 + 2(2 - z) - 3z \end{cases}$$

On trouve

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 2 - z, x = 5 - 5z \right\} \\ = \left\{ (5 - 5z, 2 - z, z) \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

/5

2) Déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de :

$$F = \frac{X^7}{X^4 + 2X^2 + 1}$$

Un calcul de division euclidienne donne

$$X^7 = (X^3 - 2X)(X^4 + 2X^2 + 1) + 3X^3 + 2X$$

On a donc

$$F = X^3 - 2X + \frac{3X^3 + 2X}{X^4 + 2X^2 + 1}$$

Ensuite,

$$X^4 + 2X^2 + 1 = (X^2 + 1)^2$$

et il s'agit de la factorisation du dénominateur dans $\mathbb{R}[X]$. Enfin, après calculs (ou bien en remarquant que $3X^3 + 2X = 3X(X^2 + 1) - X\dots$), on trouve :

$$\frac{3X^3 + 2X}{(X^2 + 1)^2} = \frac{3X}{X^2 + 1} + \frac{-X}{(X^2 + 1)^2}$$

Finalement,

$$F = X^3 - 2X + \frac{3X}{X^2 + 1} + \frac{-X}{(X^2 + 1)^2}$$

/4

3) Déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ de :

$$F = \frac{1}{(X^2 + 2X + 1)(X^2 + 2X - 1)}$$

On factorise le dénominateur : le polynôme $X^2 + 2X - 1$ a pour discriminant $\Delta = 8 > 0$, et comme racines $-1 \pm \sqrt{2}$, de sorte que :

$$(X^2 + 2X + 1)(X^2 + 2X - 1) \\ = (X + 1)^2(X + 1 - \sqrt{2})(X + 1 + \sqrt{2})$$

Après calculs, on a donc

$$F = \frac{1}{(X + 1)^2(X + 1 - \sqrt{2})(X + 1 + \sqrt{2})} \\ = \frac{0}{X + 1} + \frac{-\frac{1}{2}}{(X + 1)^2} + \frac{\frac{1}{4\sqrt{2}}}{X + 1 - \sqrt{2}} + \frac{-\frac{1}{4\sqrt{2}}}{X + 1 + \sqrt{2}}$$

/27,5 2 Des équivalents sur des sommes

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles strictement positives. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$U_n = \sum_{k=0}^n u_k \quad V_n = \sum_{k=0}^n v_k$$

Dans cet exercice, on souhaite démontrer le résultat suivant : si $u_n \sim v_n$ et si $V_n \rightarrow +\infty$, alors $U_n \sim V_n$.

On fixe $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$h_n = \frac{u_n}{v_n} - 1$$

- 1) Justifier qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $|h_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

/1,5

Comme $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 1$, on a $h_n \rightarrow 0$. Par définition de la limite, il existe

$N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $|h_n - 0| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

- 2) Justifier qu'il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N'$, on a

$$\left| \frac{h_0 v_0 + \dots + h_{N-1} v_{N-1}}{V_n} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

/2

Comme $V_n \rightarrow +\infty$ et que $h_0 v_0 + \dots + h_{N-1} v_{N-1}$ ne dépend pas de n , on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{h_0 v_0 + \dots + h_{N-1} v_{N-1}}{V_n} \right) = 0$$

Par définition de la limite, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N'$, on a

$$\left| \frac{h_0 v_0 + \dots + h_{N-1} v_{N-1}}{V_n} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

- 3) En exprimant u_n en fonction de v_n et h_n , montrer qu'il existe $N'' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N''$, on a $\left| \frac{U_n}{V_n} - 1 \right| \leq \varepsilon$.

/5

On sait que $h_n v_n = u_n - v_n$, et donc $u_n = v_n + h_n v_n$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \frac{U_n}{V_n} - 1 &= \frac{U_n - V_n}{V_n} \\ &= \frac{1}{V_n} \left(\sum_{k=0}^n u_k - \sum_{k=0}^n v_k \right) \\ &= \frac{1}{V_n} \left(\sum_{k=0}^n (v_k + h_k v_k) - \sum_{k=0}^n v_k \right) \\ &= \frac{1}{V_n} \sum_{k=0}^n h_k v_k \end{aligned}$$

On pose $N'' = \max(N, N')$. Pour tout $n \geq N''$, par les questions précédentes,

$$\begin{aligned} \left| \frac{U_n}{V_n} - 1 \right| &= \left| \frac{h_0 v_0 + \dots + h_n v_n}{v_0 + \dots + v_n} \right| \\ &\leq \left| \frac{h_0 v_0 + \dots + h_{N-1} v_{N-1}}{v_0 + \dots + v_n} \right| + \left| \frac{h_N v_N + \dots + h_n v_n}{v_0 + \dots + v_n} \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|h_N v_N + \dots + h_n v_n|}{v_0 + \dots + v_n} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|h_N| v_N + \dots + |h_n| v_n}{v_0 + \dots + v_n} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \times \frac{v_N + \dots + v_n}{v_0 + \dots + v_n} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \times \frac{v_0 + \dots + v_{N-1} + v_N + \dots + v_n}{v_0 + \dots + v_n} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \boxed{\varepsilon} \end{aligned}$$

- 4) En déduire le résultat voulu. *Note : on admet dans la suite que ce résultat est encore valable si les suites (u_n) et (v_n) ne sont définies que sur \mathbb{N}^* .*

/1,5

On a montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N'' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N''$, on a

$$\left| \frac{U_n}{V_n} - 1 \right| \leq \varepsilon$$

On en déduit que $\frac{U_n}{V_n} \rightarrow 1$, et donc $\boxed{U_n \sim V_n}$

5) Application : déterminer un équivalent simple de $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. En

/5 déduire que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Comme $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, on a (par composition à droite)

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\ &= \ln\left(\prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k}\right) \\ &= \ln(n+1) \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Ainsi, on peut appliquer le résultat avec $v_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ et $u_n = \frac{1}{n}$. On en déduit que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln(n+1)$$

et donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n+1)$$

Enfin, $\ln(n+1) = \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. De plus, $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 0$

donc $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ est négligeable devant $\ln n$. Donc $\ln(n+1) \sim \ln n$.

Finalement,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \boxed{\ln(n)}$$

6) Application : en déduire un équivalent simple de U_n pour chacune des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ suivantes :

$$u_n = \ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right) \quad u_n = \frac{\sqrt[n]{n} - 1}{\ln(n+1)}$$

/8,5

On commence par la suite de terme général $u_n = \ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right)$

$$\begin{aligned} u_n &= \ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right) \\ &= \ln\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \\ &\sim -\frac{1}{2n+1} \quad \text{car } \frac{1}{2n+1} \rightarrow 0 \\ &\sim -\frac{1}{2n} \end{aligned}$$

On pose $v_n = -\frac{1}{2n}$, de sorte que $V_n = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim -\frac{1}{2} \ln(n)$ par ce qui précède. On constate que (u_n) et (v_n) ne sont pas strictement positives, et que $V_n \rightarrow -\infty$. C'est pourquoi, on définit les suites (u'_n) et (v'_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u'_n = -u_n \quad \text{et} \quad v'_n = -v_n$$

de sorte que, en notant $U'_n = \sum_{k=1}^n u'_k$ et $V'_n = \sum_{k=1}^n v'_k$, on obtient

$$u'_n \sim \frac{1}{2n} = v'_n \quad V'_n = -V_n = \frac{1}{2} \ln(n) \rightarrow +\infty$$

Ainsi, par le résultat démontré, on a bien

$$U'_n \sim V'_n = \frac{1}{2} \ln(n)$$

de sorte que

$$U_n = -U'_n \sim \boxed{-\frac{1}{2} \ln(n)}$$

Passons à $u_n = \frac{\sqrt[n]{n} - 1}{\ln(n+1)}$: on a vu que $\ln(n+1) \sim \ln(n)$ par la

question 5). Il reste à trouver un équivalent de $\sqrt[n]{n} - 1$:

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{n} - 1 &= n^{\frac{1}{n}} - 1 \\ &= e^{\frac{1}{n} \ln n} - 1\end{aligned}$$

Or, $\frac{1}{n} \ln n \rightarrow 0$ par croissances comparées. Comme $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, on en déduit que

$$\sqrt[n]{n} - 1 \sim \frac{1}{n} \ln(n)$$

Ainsi,

$$u_n \sim \frac{1}{n}$$

Comme $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \rightarrow +\infty$, on en déduit que :

$$U_n \sim \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \boxed{\ln(n)}$$

7) Avec un contre-exemple, montrer que le résultat de cet exercice tombe en défaut sans l'hypothèse « $V_n \rightarrow +\infty$ ».

On pose $u_n = \frac{1}{2^n}$ et $v_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 0 \\ \frac{1}{2^n} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$. On a trivialement $u_n \sim v_n$. De plus,

$$U_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \rightarrow 2$$

Mais comme $V_n = 1 + U_n$, on a $V_n \rightarrow 3$. Donc $U_n \not\sim V_n$.

3 Deux exercices indépendants sur les polynômes

1) Soit $n \geq 2$ un entier et $P = X^n - X + 1$. Montrer que toutes les racines de P sont simples.

Supposons par l'absurde que P admette une racine $\alpha \in \mathbb{C}$ de multiplicité au moins deux. Alors $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$. On en déduit :

$$\begin{cases} \alpha^n - \alpha + 1 = 0 \\ n\alpha^{n-1} - 1 = 0 \end{cases}$$

En multipliant la seconde ligne par α , on obtient $n\alpha^n - \alpha = 0$, donc $\alpha^n = \frac{1}{n}\alpha$. On en déduit avec la première ligne que

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\alpha - \alpha + 1 &= 0 \\ \Rightarrow \left(\frac{1}{n} - 1\right)\alpha + 1 &= 0 \\ \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{n}\right)\alpha &= 1 \\ \Rightarrow \alpha &= \frac{n}{n-1}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}n\alpha^{n-1} - 1 &= 0 \\ \Rightarrow \alpha^{n-1} &= \frac{1}{n} \\ \Rightarrow \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}} &= \frac{1}{n} \\ \Rightarrow \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} &= 1 \\ \Rightarrow n^n &= (n-1)^{n-1}\end{aligned}$$

Or, comme $n \geq 2$, on a $n > n-1$, donc $n^{n-1} > (n-1)^{n-1}$ par stricte croissance de $x \mapsto x^{n-1}$, ce qui entraîne $n^n > (n-1)^{n-1}$. Contradiction. Donc P n'admet pas de racine double.

2) Montrer que pour tous $m, n, p, q \in \mathbb{N}$, le polynôme $P = X^3 + X^2 + X + 1$ divise le polynôme

$$Q = X^{4m+3} + X^{4n+2} + X^{4p+1} + X^{4q}$$

On remarque que

$$\begin{aligned}(X - 1)P &= X^4 - 1 \\ &= (X^2 - 1)(X^2 + 1) \\ &= (X - 1)(X + 1)(X - i)(X + i)\end{aligned}$$

On en déduit que

$$P = (X + 1)(X - i)(X + i)$$

(note : on aurait aussi pu voir que -1 est racine évidente de P).
Pour montrer que $P \mid Q$, il suffit de montrer que $X + 1$, $X - i$ et $X + i$ divisent Q , i.e. que $Q(-1) = Q(i) = Q(-i) = 0$. Soit $\alpha \in \{-1, i, -i\}$. Comme $\alpha^4 = 1$, on a

$$\begin{aligned}Q(\alpha) &= \alpha^{4m+3} + \alpha^{4n+2} + \alpha^{4p+1} + \alpha^{4q} \\ &= (\alpha^4)^m \alpha^3 + (\alpha^4)^n \alpha^2 + (\alpha^4)^p \alpha + (\alpha^4)^q \\ &= \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 \\ &= P(\alpha) = 0\end{aligned}$$

ce qui prouve que $P \mid Q$.